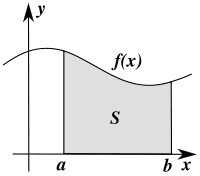
Постановка задачи

Требуется вычислить приближённое значение определённого интеграла, основанное на том, что величина интеграла численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, графиком интегрируемой функции и отрезками прямых  x = a и x = b, где  a и b — пределы интегрирования (см. рисунок).****

На основе последовательного алгоритма требуется разработать параллельный вариант для нескольких потоков с целью ускорения выполнения процесса на многоядерных архитектурах. Время выполнения параллельной программы сравнить со временем выполнения последовательной и объяснить результаты. Привести оценки сложности.

Использовав три точки отрезка интегрирования можно заменить подынтегральную функцию параболой. Обычно в качестве таких точек используют концы отрезка и его среднюю точку. В этом случае формула имеет очень простой вид

http://www.hpcc.unn.ru/image.php?id=262

Если разбить интервал интегрирования на 2N равных частей, то имеем

http://www.hpcc.unn.ru/image.php?id=263

где    http://www.hpcc.unn.ru/image.php?id=264

Анализ эффективности

Для анализа будем использовать следующие показатели:

**n -**количество вычислений значения функции.

**T1** - время решения задачи на одном процессоре.

**Tp** - время решения задачи на p процессорах.

**S** - ускорение (speedup). Ускорение определяется из отношения: **S**=**T1**/**Tp** .

Сложность последовательного алгоритма **T1**   = O(n)

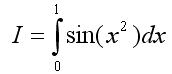
Для  p потоков:

**Tp**=О(n/p)

**S** = О(n)/O(n/p)->p

Результаты вычислительных экспериментов

Вычисления проводились на процессоре Intel Core 2 Duo E6550 с частотой 2.33 ГГц.

Вычисляемый интеграл:

Результаты

Число итераций Один поток Два потока Ускорение

1000000297 ms 172 ms 1,72674418

100000003078 ms 1594 ms 1,93099121

10000000030687 ms 16156 ms 1.89941817

Формула метода Симпсона имеет вид ∫baf(x)dx≈h3(f(x0)+4∑ni=1f(x2i−1)+2∑n−1i=1f(x2i)+f(x2n))∫abf(x)dx≈h3f(x0)+4∑i=1nf(x2i-1)+2∑i=1n-1f(x2i)+f(x2n).

# Simpson's rule

In [numerical analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_analysis), **Simpson's rule** is a method for [numerical integration](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration), the numerical approximation of [definite integrals](https://en.wikipedia.org/wiki/Definite_integral). Specifically, it is the following approximation for {\displaystyle n}equally spaced subdivisions (where {\displaystyle n} is odd): (General Form)

{\displaystyle \int \_{a}^{b}f(x)\,dx\approx {\tfrac {\Delta x}{3}}\left(f(x\_{1})+4f(x\_{2})+2f(x\_{3})+4f(x\_{4})+2f(x\_{5})+\cdots +4f(x\_{n-1})+f(x\_{n})\right)},

where {\displaystyle \Delta x={\frac {b-a}{n}}} and {\displaystyle x\_{i}=a+i\Delta x}.

Simpson's rule also corresponds to the three-point [Newton-Cotes quadrature rule](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%E2%80%93Cotes_formulas).

In English, the method is credited to the mathematician [Thomas Simpson](https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Simpson) (1710–1761) of Leicestershire, England. However, [Johannes Kepler](https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler) used similar formulas over 100 years prior, and for this reason the method is sometimes called **Kepler's rule**, or *Keplersche Fassregel* (Kepler's barrel rule) in German.

One derivation replaces the integrand {\displaystyle f(x)} by the [quadratic polynomial](https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_polynomial" \o "Quadratic polynomial) (i.e. parabola){\displaystyle P(x)} which takes the same values as {\displaystyle f(x)} at the end points *a* and *b* and the midpoint *m* = (*a* + *b*) / 2. One can use [Lagrange polynomial interpolation](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial" \o "Lagrange polynomial) to find an expression for this polynomial,

{\displaystyle P(x)=f(a){\tfrac {(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}}+f(m){\tfrac {(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)}}+f(b){\tfrac {(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}}.}

Using [integration by substitution](https://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_substitution" \o "Integration by substitution) one can show that[[1]](https://en.wikipedia.org/wiki/Simpson%27s_rule" \l "cite_note-1)

{\displaystyle \int \_{a}^{b}P(x)\,dx={\tfrac {b-a}{6}}\left[f(a)+4f\left({\tfrac {a+b}{2}}\right)+f(b)\right].}

Introducing the step size {\displaystyle h=(b-a)/2} this is also commonly written as

{\displaystyle \int \_{a}^{b}P(x)\,dx={\tfrac {h}{3}}\left[f(a)+4f\left({\tfrac {a+b}{2}}\right)+f(b)\right].}

Because of the {\displaystyle 1/3} factor Simpson's rule is also referred to as Simpson's 1/3 rule (see below for generalization).

The calculation above can be simplified if one observes that (by scaling) there is [no loss of generality](https://en.wikipedia.org/wiki/Without_loss_of_generality" \o "Without loss of generality) in assuming that {\displaystyle a=-1}。

### Averaging the midpoint and the trapezoidal rules[[edit](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Simpson%27s_rule&action=edit&section=2" \o "Edit section: Averaging the midpoint and the trapezoidal rules)]

Another derivation constructs Simpson's rule from two simpler approximations: the [midpoint rule](https://en.wikipedia.org/wiki/Rectangle_rule" \o "Rectangle rule)

{\displaystyle M=(b-a)f\left({\tfrac {a+b}{2}}\right)}

and the [trapezoidal rule](https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule" \o "Trapezoidal rule)

{\displaystyle T={\tfrac {1}{2}}(b-a)(f(a)+f(b)).}

The errors in these approximations are

{\displaystyle {\tfrac {1}{24}}(b-a)^{3}f''(a)+O((b-a)^{4})\quad {\text{and}}\quad -{\tfrac {1}{12}}(b-a)^{3}f''(a)+O((b-a)^{4}),}

respectively, where {\displaystyle O((b-a)^{4})} denotes a term asymptotically proportional to {\displaystyle (b-a)^{4}}. The two {\displaystyle O((b-a)^{4})} terms are not equal; see [Big O notation](https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation" \o "Big O notation) for more details. It follows from the above formulas for the errors of the midpoint and trapezoidal rule that the leading error term vanishes if we take the [weighted average](https://en.wikipedia.org/wiki/Weighted_average" \o "Weighted average)

{\displaystyle {\tfrac {2M+T}{3}}.}

This weighted average is exactly Simpson's rule.

Using another approximation (for example, the trapezoidal rule with twice as many points), it is possible to take a suitable weighted average and eliminate another error term. This is [Romberg's method](https://en.wikipedia.org/wiki/Romberg%27s_method" \o "Romberg's method).

### Undetermined coefficients[[edit](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Simpson%27s_rule&action=edit&section=3" \o "Edit section: Undetermined coefficients)]

The third derivation starts from the *[ansatz](https://en.wikipedia.org/wiki/Ansatz" \o "Ansatz)*

{\displaystyle {\tfrac {1}{b-a}}\int \_{a}^{b}f(x)\,dx\approx \alpha f(a)+\beta f\left({\tfrac {a+b}{2}}\right)+\gamma f(b).}

The coefficients α, β and γ can be fixed by requiring that this approximation be exact for all quadratic polynomials. This yields Simpson's rule.